

Session: Janvier 2023

Année d'étude: Troisième année de Licence économie-gestion
Mention sciences économiques
Parcours économie managériale et industrielle

Discipline: **Théorie des jeux et stratégie de l'entreprise**
(Unité d'enseignements fondamentaux 1)

Titulaire du cours: Mme Christine HALMENSCHLAGER

Attention: l'usage des calculettes - programmables ou non - smartphones, tablettes, montres connectées etc ... n'est pas autorisé. Aucun document autorisé.

Ce sujet comporte 13 pages. Avant de composer, veuillez vérifier que votre sujet est complet.

Le sujet comprend 4 exercices. L'ensemble des exercices est à traiter.

L'exercice 1 est à rédiger. Les exercices 2, 3 et 4 sont des QCM.

Il sera pris en considération dans la notation la qualité de la rédaction et de la présentation des copies.

Il sera également pris en considération le respect strict des consignes, en particulier pour les QCM.

Un conseil pour les QCM : dans un premier temps, faites vos calculs sans regarder les réponses proposées.

Exercice 1 - le jeu de l'électricité

On considère la situation où deux entreprises interagissent de manière simultanée. Leur matrice des paiements est la suivante :

		<i>Entreprise 2</i>		
		A_2	B_2	C_2
<i>Entreprise 1</i>	A_1	2 -2	y 2	5 4
	B_1	6 3	10 0	1 2
	C_1	5 4	9 x	-1 -2

où x et y sont indicés sur le prix de l'électricité.

1. Donner la(les) condition(s) selon la(les)quelle(s) une stratégie $s_i \in S_i$ domine strictement une stratégie $s'_i \in S_i$ d'un joueur i .
2. Donner les définitions littéraire et mathématique d'un équilibre de Nash en stratégies pures.
3. Déterminer le(s) équilibre(s) de Nash en stratégies *pures* et *mixtes* de ce jeu. Justifier. Donner le nom des méthodes utilisées et les hypothèses permettant leur application.

Exercice 2 - le jeu du bénévolat

Questionnaire à choix multiples (une seule réponse possible par question).

Consigne : Vous inscrirez obligatoirement sur votre copie vos réponses sous la forme : Exercice 2 / Numéro de la question / lettre a, b, c, d ou e correspondant à votre réponse.

Attention : Une seule réponse acceptée par question. Si vous donnez plus d'une réponse à une question, aucun point ne sera compté à cette question.

Deux passionnées d'ornithologie fondent une association pour la protection des oiseaux migrateurs qui viennent s'arrêter chaque année sur un étang. Chacune de ces deux passionnées peut consacrer une partie de son temps libre, de manière bénévole, à nettoyer les abords de l'étang, afin de le rendre plus accueillant aux oiseaux. Elles ont envie toutes les deux d'un étang bien propre, couvert d'oiseaux, et plus elles passent de temps en bénévolat, et plus les oiseaux sont nombreux. Néanmoins, chacune préfère que ce soit l'autre qui assure le bénévolat.

Supposons que chacune des deux passionnées puisse effectuer 0, 1, 2, 3 ou 4 heures de bénévolat par semaine. Si la première passionnée effectue x_1 heures de bénévolat et la seconde effectue x_2 heures de bénévolat, l'étang et ses oiseaux leur apporteront une utilité égale à $\sqrt{x_1 + x_2}$ chacune, mais leur bénévolat leur confèrera une désutilité égale au nombre d'heures effectuées. Ainsi, si la première passionnée effectue x_1 heures de bénévolat et la seconde x_2 , alors l'utilité totale de la première sera $\sqrt{x_1 + x_2} - x_1$ et l'utilité de la seconde $\sqrt{x_1 + x_2} - x_2$. Les décisions de bénévolat sont prises simultanément par les deux passionnées.

1. Donner les raisons pour lesquelles cette situation est un jeu au sens de la théorie des jeux.
 - (a) Cette situation est un jeu car l'information est imparfaite et elle ne saurait pas être résolue par une autre théorie.
 - (b) Cette situation est un jeu car nous sommes en présence de deux passionnées aux comportements stratégique et rationnel.
 - (c) Cette situation est un jeu car l'information des joueurs est connaissance commune.

- (d) Cette situation est un jeu car nous sommes en présence d'un groupe de joueurs (les deux passionnées) rationnels, en interaction, au comportement stratégique.

2. **Dominance faible.** Soit un jeu sous forme normale $\{N, S_i, \pi_i, i \in N\}$, une stratégie $s_i \in S_i$ domine faiblement une stratégie $s'_i \in S_i$ si

(a)

$$\forall s_{-i} \in S_{-i} \quad \pi_i(s_i, s_{-i}) \geq \pi_i(s'_i, s_{-i})$$

(b)

$$\begin{aligned} \forall s_{-i} \in S_{-i} \quad \pi_i(s_i, s_{-i}) &\geq \pi_i(s'_i, s_{-i}) \\ \text{et } \exists s_{-i} \in S_{-i} \quad \pi_i(s_i, s_{-i}) &> \pi_i(s'_i, s_{-i}) \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \forall i \in N \quad \forall s_{-i} \in S_{-i} \quad \pi_i(s_i, s_{-i}) &\geq \pi_i(s'_i, s_{-i}) \\ \text{et } \exists s_{-i} \in S_{-i} \quad \pi_i(s_i, s_{-i}) &> \pi_i(s'_i, s_{-i}) \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} \exists s_{-i} \in S_{-i} \quad \pi_i(s_i, s_{-i}) &\geq \pi_i(s'_i, s_{-i}) \\ \text{et } \exists s_{-i} \in S_{-i} \quad \pi_i(s_i, s_{-i}) &> \pi_i(s'_i, s_{-i}) \end{aligned}$$

3. Donner la définition littéraire d'une stratégie faiblement dominante.

- (a) Une stratégie faiblement dominante pour un joueur est une stratégie qui domine faiblement une autre stratégie du joueur avec au moins une inégalité stricte.
- (b) Une stratégie faiblement dominante pour un joueur est une stratégie qui domine faiblement toutes les autres stratégies du joueur.
- (c) Une stratégie faiblement dominante pour un joueur est une stratégie dominée strictement par au moins une autre stratégie du joueur.
- (d) Une stratégie faiblement dominante pour un joueur est une stratégie qui domine faiblement au moins une autre stratégie du joueur.

4. Décrire cette situation par un jeu sous forme normale.

(a)

$$\begin{aligned} N &= \{1, 2\}, S_1 = S_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}, \pi_1(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 + x_2} - x_2, \\ \pi_2(x_1, x_2) &= \sqrt{x_1 + x_2} - x_1, \forall (x_1, x_2) \in S_1 \times S_2 \end{aligned}$$

(b)

$$N = \{1, 2\}, S_1 = x_1 \in \mathbb{R}, S_2 = x_2 \in \mathbb{R}, \pi_1(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 + x_2} - x_1, \\ \pi_2(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 + x_2} - x_2, \forall (x_1, x_2) \in S_1 \times S_2$$

(c)

$$N = \{1, 2\}, S_1 = S_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}, \pi_1(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 + x_2} - x_1, \\ \pi_2(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 + x_2} - x_2, \forall (x_1, x_2) \in S_1 \times S_2$$

(d)

		Passionnée 2	
Passionnée 1		x_1	x_2
	x_1	$\pi_1(x_1, x_1)$ $\pi_2(x_1, x_1)$	$\pi_1(x_1, x_2)$ $\pi_2(x_1, x_2)$
	x_2	$\pi_1(x_2, x_1)$ $\pi_2(x_2, x_1)$	$\pi_1(x_2, x_2)$ $\pi_2(x_2, x_2)$

5. La stratégie d'1 heure de bénévolat de la passionnée 1 domine strictement sa stratégie de 2 heures de bénévolat si

(a)

$$\sqrt{1 + x_2} > \sqrt{2 + x_2}$$

(b)

$$\sqrt{1 + x_2} > \frac{1}{2}$$

(c)

$$\sqrt{1 + x_2} < 0$$

(d)

$$\sqrt{1 + x_2} > 0$$

6. La stratégie de faire 1 heure de bénévolat

- (a) ne domine pas faiblement la stratégie de faire 2 heures de bénévolat.
- (b) est dominée strictement par la stratégie de faire 2 heures de bénévolat.
- (c) est une stratégie dominante.
- (d) est une stratégie faiblement dominante.
- (e) domine strictement la stratégie de faire 2 heures de bénévolat.

7. La stratégie $x_1 = 0$ de la passionnée 1 est faiblement dominante si

(a)

$$2\sqrt{x_2} \geq 0$$

- (b) $2\sqrt{x_2} + x_1 \geq 0$
- (c) $2\sqrt{x_1} + x_2 \geq 0$
- (d) $2\sqrt{x_2} + x_1 \geq 1$

8. La stratégie de n'effectuer aucune heure de bénévolat

- (a) est une stratégie faiblement dominante pour la passionnée 1 et faiblement dominée pour la passionnée 2.
- (b) est une stratégie faiblement dominante pour chacune des passionnées.
- (c) est une stratégie strictement dominée pour chacune des passionnées.
- (d) est une stratégie faiblement dominée pour chacune des passionnées.
- (e) est une stratégie strictement dominante pour chacune des passionnées.

Exercice 3 - le jeu de l'innovation

Questionnaire à choix multiples (une seule réponse possible par question).

Consigne : Vous inscrirez obligatoirement sur votre copie vos réponses sous la forme : Exercice 3 / Numéro de la question / lettre a, b, c, d, e, f ou g correspondant à votre réponse.

Attention : Une seule réponse acceptée par question. Si vous donnez plus d'une réponse à une question, aucun point ne sera compté à cette question.

Deux entreprises (notées 1 et 2) se concurrencent à la Cournot. Elles sont identiques au départ et font face à la demande suivante :

$$p(Q) = 9 - Q,$$

où $Q = q_1 + q_2$ est la quantité totale produite.

Chaque entreprise produit le bien avec un coût unitaire de production constant, $c = 3$.

La concurrence entre les deux entreprises se déroule sur deux étapes.

Dans une première étape, chaque entreprise peut choisir d'investir en Recherche et Développement ($R\&D$) ou non ($\overline{R\&D}$). Les choix des deux entreprises sont simultanés. Investir en Recherche et Développement permet de baisser le coût unitaire de production, c'est une innovation de procédé. Pour simplifier, nous supposons qu'avec cette innovation de procédé, les entreprises passent d'un coût unitaire de production $c = 3$ à un coût unitaire nul $c = 0$. La $R\&D$ a un coût, noté γ , avec $\gamma = 6$. Une entreprise, en choisissant de ne pas faire d'effort en $R\&D$, produit avec le coût unitaire de production $c = 3$, en revanche, elle ne subit pas de coût de $R\&D$.

A l'issue de cette première étape, chacune des entreprises observe le choix de sa rivale. Chacune décide dans une seconde étape de sa quantité à produire.

1. Quand les deux entreprises choisissent d'investir en R&D, elles produisent les quantités suivantes :

- (a) $q_1 = \frac{10}{3}$ et $q_2 = \frac{10}{3}$
- (b) $q_1 = 4$ et $q_2 = 4$
- (c) $q_1 = 3$ et $q_2 = 3$
- (d) $q_1 = \frac{1}{3}$ et $q_2 = \frac{1}{3}$
- (e) $q_1 = \frac{27}{7}$ et $q_2 = \frac{9}{7}$

2. Quand une seule entreprise (noté i) choisit d'investir en R&D alors que sa rivale (noté j) ne choisit pas d'investir en R&D, elles produisent les quantités suivantes :

- (a) $q_i = \frac{12}{5}$ et $q_j = \frac{9}{5}$
- (b) $q_i = 4$ et $q_j = 2$
- (c) $q_i = 4$ et $q_j = 1$
- (d) $q_i = 3$ et $q_j = 2$
- (e) $q_j = 4$ et $q_i = 3$

3. Quand aucune des deux entreprises ne choisissent d'investir en R&D, elles produisent les quantités suivantes :

- (a) $q_1 = 4$ et $q_2 = 4$
- (b) $q_1 = \frac{8}{3}$ et $q_2 = \frac{8}{3}$
- (c) $q_1 = 3$ et $q_2 = 3$
- (d) $q_1 = \frac{6}{5}$ et $q_2 = \frac{6}{5}$
- (e) $q_1 = 2$ et $q_2 = 2$

4. Les profits des entreprises (notés π_1 et π_2) dans le jeu à deux étapes quand elles choisissent d'investir l'une et l'autre en R&D sont :

- (a) $\pi_1 = \pi_2 = 9$
- (b) $\pi_1 = \pi_2 = 3$
- (c) $\pi_1 = \pi_2 = 4$
- (d) $\pi_1 = \pi_2 = \frac{16}{9}$
- (e) $\pi_1 = \pi_2 = 2$

5. Les profits des entreprises (notés π_1 et π_2) dans le jeu à deux étapes quand elles choisissent toutes les deux de ne pas investir en R&D sont :

- (a) $\pi_1 = \pi_2 = \frac{108}{5}$

- (b) $\pi_1 = \pi_2 = 9$
 (c) $\pi_1 = \pi_2 = 3$
 (d) $\pi_1 = \pi_2 = 2$
 (e) $\pi_1 = \pi_2 = 4$
6. Combien de composantes ont les stratégies des deux entreprises ?
- (a) 5 composantes
 (b) 3 composantes
 (c) 4 composantes
 (d) 1 composante
 (e) 2 composantes
7. L'équilibre de Nash parfait en sous-jeu (s_1^*, s_2^*) est tel que :
- (a)
- $$s_1^* = R\&D \text{ et } s_2^* = R\&D$$
- (b)
- $$s_1^* = \overline{R\&D} \frac{6}{5} \text{ et } s_2^* = \overline{R\&D} \frac{6}{5}$$
- (c)
- $$s_1^* = R\&D \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \text{ et } s_2^* = R\&D \ 3 \ 3 \ 3 \ 3$$
- (d)
- $$s_1^* = R\&D \ 3 \ 4 \ 1 \ 2 \text{ et } s_2^* = R\&D \ 3 \ 1 \ 4 \ 2$$
- (e)
- $$s_1^* = \overline{R\&D} \frac{6}{5} \frac{6}{5} \text{ et } s_2^* = \overline{R\&D} \frac{6}{5} \frac{6}{5}$$
- (f)
- $$s_1^* = R\&D \ 3 \text{ et } s_2^* = R\&D \ 3$$
- (g)
- $$s_1^* = R\&D \ \frac{10}{3} \text{ et } s_2^* = R\&D \ \frac{10}{3}$$
8. Est-ce que les entreprises sont confrontées à un type de jeu classique dans le sous-jeu des choix de R&D ?
- (a) Non, elles ne sont confrontées à aucun type de jeu classique.
 (b) Oui, elles sont confrontées à une bataille des sexes
 (c) Oui, elles sont confrontées à un jeu répété

- (d) Oui, elles sont confrontées à un jeu de la poule-mouillée
- (e) Oui, elles sont confrontées à un jeu à somme constante
- (f) Oui, elles sont confrontées à un dilemme du prisonnier

Exercice 4 - le jeu des pénalités de retard

Questionnaire à choix multiples (une seule réponse possible par question).

Consigne : Vous inscrirez obligatoirement sur votre copie vos réponses sous la forme : Exercice 4 / Numéro de la question / lettre a, b, c, d, e ou f correspondant à votre réponse.

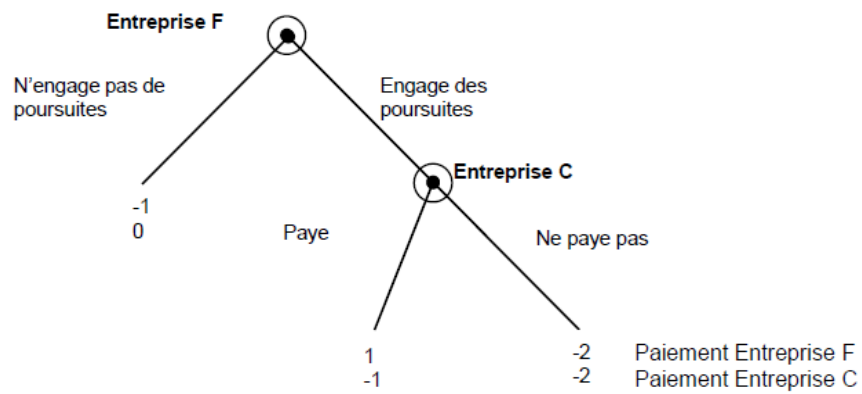
Attention : Une seule réponse acceptée par question. Si vous donnez plus d'une réponse à une question, aucun point ne sera compté à cette question.

Une entreprise fournisseur, notée F , est sous-traitante d'une entreprise cliente, notée C . Le fournisseur, à la suite d'un audit comptable, exige de sa cliente de lui régler toutes ses factures impayées et lui demande en plus un montant élevé de pénalités de retard. L'entreprise cliente évalue la possibilité de ne pas payer ces pénalités de retard. Le fournisseur peut engager des poursuites judiciaires en cas de refus de paiement de ces pénalités de retard. Il serait certain de gagner mais ne s'y résout pas forcément car les poursuites judiciaires sont coûteuses.

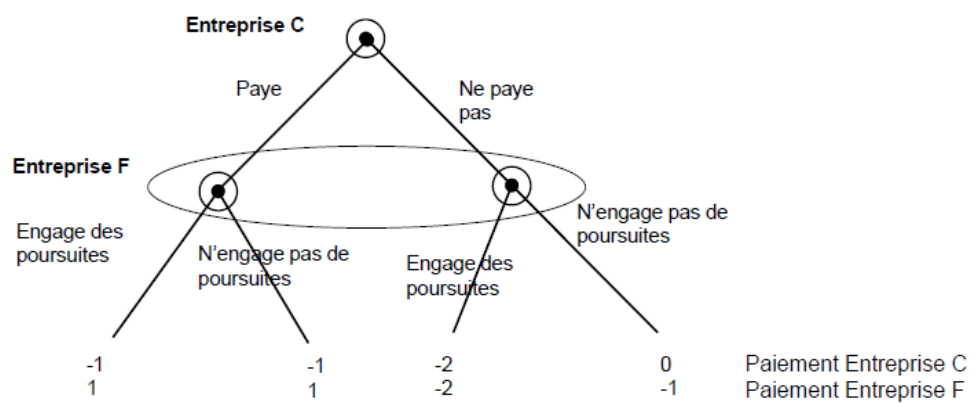
L'entreprise cliente commence par choisir de payer (P) ou non ($\overline{P}$) ces pénalités. Dans le cas où elle choisit de payer ces pénalités, son paiement est égal à -1 et celui de l'entreprise fournisseur égal à 1 . Dans le cas où elle ne paie pas -une décision observée par le fournisseur-, ce dernier peut choisir d'engager des poursuites judiciaires (PJ) ou non ($\overline{PJ}$). Dans le cas où le fournisseur choisit de la poursuivre suite à cette action, les paiements du fournisseur et de sa cliente sont égaux à -2 . Dans le cas où, au contraire, le fournisseur ne la poursuit pas malgré son refus de paiement des pénalités de retard, les paiements de l'entreprise cliente et de son fournisseur sont respectivement égaux à 0 et -1 .

On s'attache ici à déterminer les comportements d'équilibre raisonnables dans cette situation opposant le fournisseur et sa cliente.

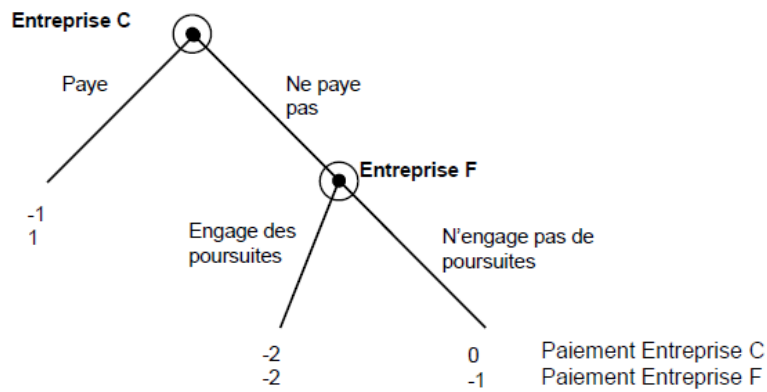
1. Quelle est la forme extensive de ce jeu ?



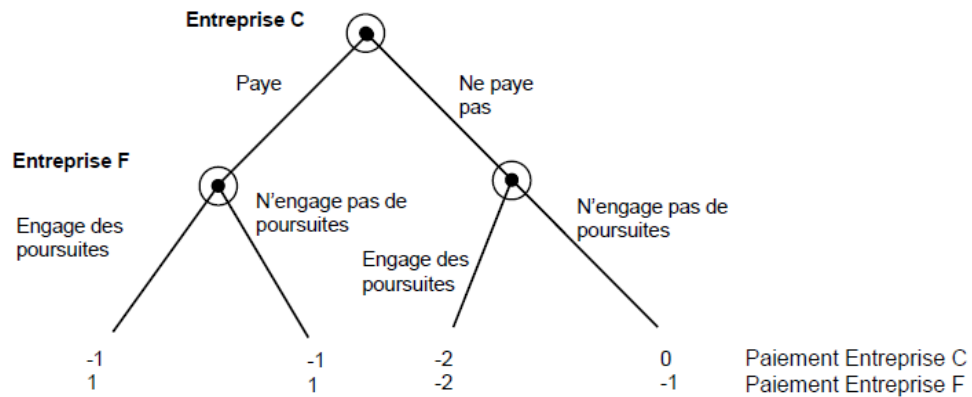
(a)



(b)



(c)



(d)

2. Déterminer l'(es) équilibre(s) de Nash en stratégies pures :

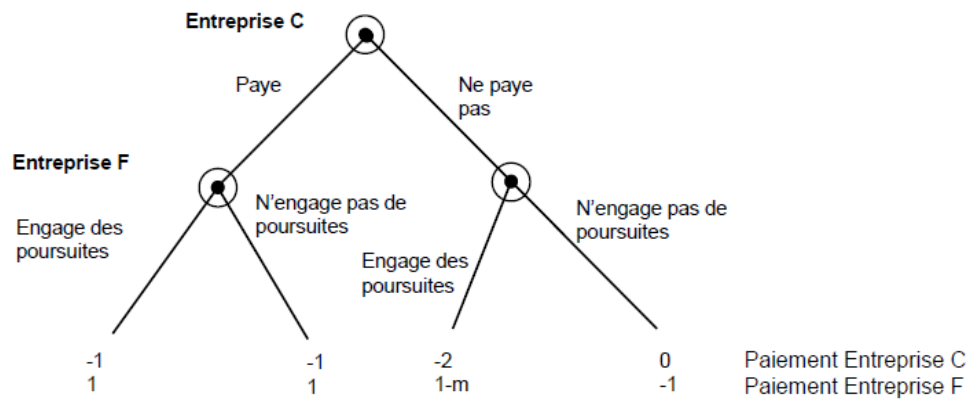
- (a) $(\overline{P}, PJ \overline{PJ})$ et $(\overline{P}, \overline{PJ} \overline{PJ})$
- (b) $(\overline{P}, P)$ et $(PJ, \overline{PJ})$
- (c) (P, PJ)
- (d) Il n'y a pas d'équilibre de Nash en stratégies pures dans ce jeu
- (e) (P, PJ) et $(\overline{P}, \overline{PJ})$
- (f) $(\overline{P}, \overline{PJ})$

3. Déterminer l'(es) équilibre(s) de Nash raisonnable(s) :

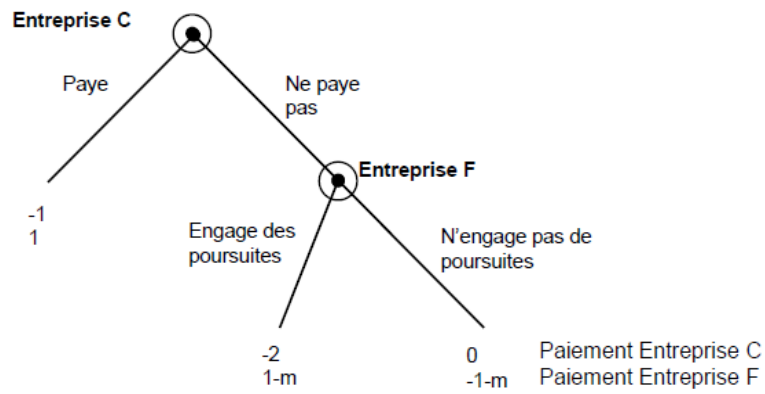
- (a) Il n'y a pas d'équilibre de Nash raisonnable dans ce jeu
- (b) (P, PJ) et $(\overline{P}, \overline{PJ})$
- (c) $(\overline{P}, \overline{PJ})$
- (d) $(\overline{P}, P)$ et $(PJ, \overline{PJ})$
- (e) $(\overline{P}, PJ \overline{PJ})$ et $(\overline{P}, \overline{PJ} \overline{PJ})$
- (f) (P, PJ)

On suppose maintenant que l'entreprise fournisseur recrute un avocat dans sa société qu'il rémunère avec un salaire d'un montant m quelles que soient les actions des protagonistes. Dans ce litige opposant le fournisseur et l'entreprise cliente, l'avocat permet à son employeur d'obtenir un paiement de $1 - m$ si le fournisseur engage des poursuites judiciaires contre une entreprise cliente récalcitrante à payer les pénalités de retard.

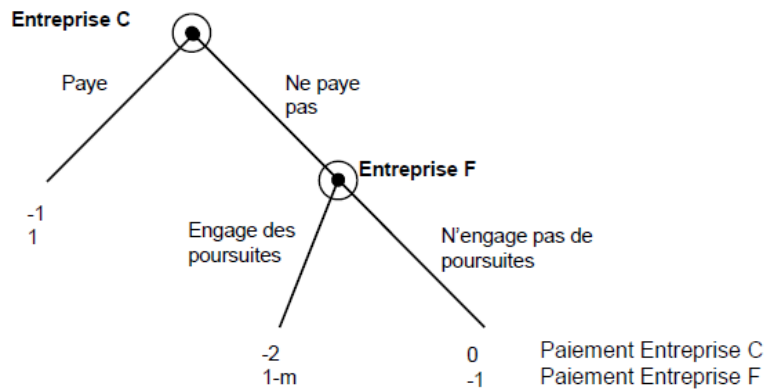
4. Quelle est la forme extensive de ce nouveau jeu ?



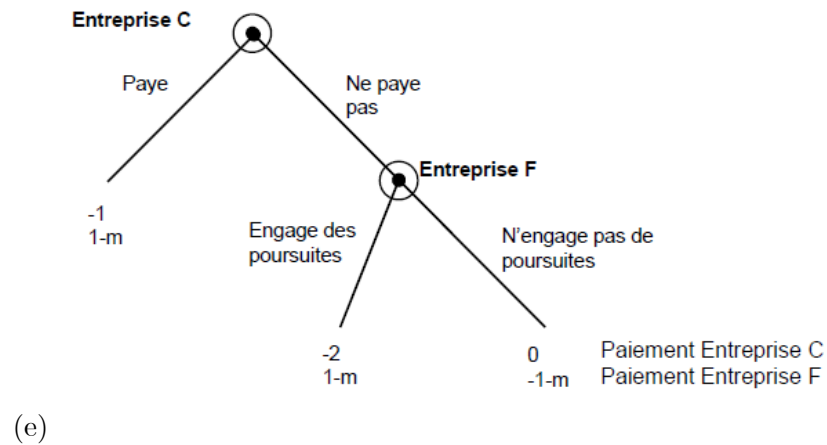
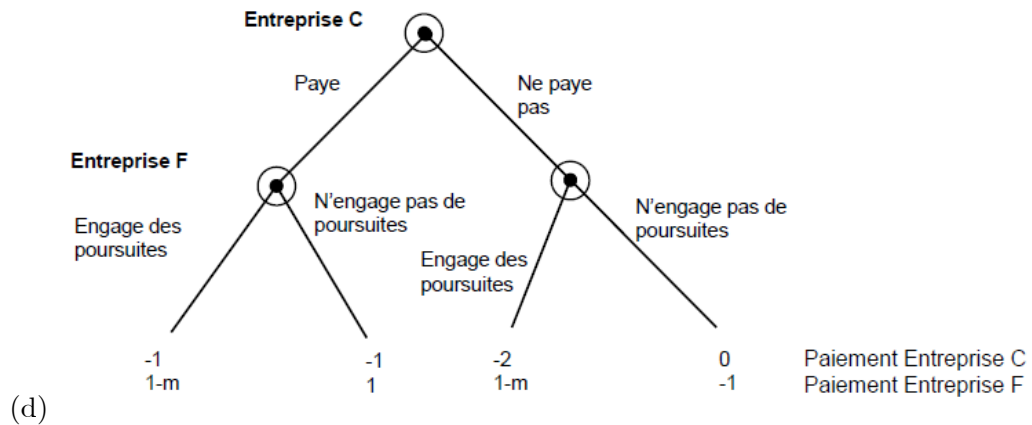
(a)



(b)



(c)



5. Déterminer l'(es) équilibre(s) de Nash raisonnable(s) du jeu ainsi modifié :
- (a) Il n'y a pas non plus d'équilibre de Nash raisonnable dans ce jeu
 - (b) $(\overline{P}, \overline{PJ})$
 - (c) $(\overline{P}, PJ \ \overline{PJ})$ et $(\overline{P}, \overline{PJ} \ \overline{PJ})$
 - (d) (P, PJ)
 - (e) $(\overline{P}, P)$ et $(PJ, \overline{PJ})$
 - (f) (P, PJ) et $(\overline{P}, \overline{PJ})$
6. Donner la condition sur m pour laquelle l'entreprise fournisseur a raison d'embaucher un avocat :
- (a) $m < 2$
 - (b) Quelle que soit la valeur de m , l'entreprise fournisseur a tort d'embaucher un avocat.
 - (c) $m > 0$

- (d) $m < 1$
- (e) $m < \sqrt{2}$

Bonne épreuve!