

Paris

Session : JANVIER 2023 – 1^{er} semestre
Année d'études : Master 1 Statistique, Econométrie
Mention : Ingénierie Statistique et Financière
Discipline : Théorie du portefeuille
(Unités d'Enseignements Fondamentaux 1)
Titulaire du cours : Ali Skalli
Durée de l'épreuve : 1 heure et 30 minutes
Documents autorisés : Aucun (Calculatrices standards autorisées)

Ce sujet comporte 2 pages. Avant de composer, veuillez vérifier que votre sujet est complet.

Exercice 1 (6,5 points) :

On considère un marché financier dans lequel ne sont échangés que 2 titres risqués, A et B dont nous noterons les rentabilités respectives, R_A et R_B et dont les caractéristiques sont les suivantes :

$$E(R_A) = \mu_A = 1 \quad \text{var}(R_A) = \sigma_A^2 = 1$$

$$E(R_B) = \mu_B = 2 \quad \text{var}(R_B) = \sigma_B^2 = 4$$

$$\rho_{AB} = 0.$$

ρ_{AB} désignant le coefficient de corrélation linéaire entre les rentabilités des deux titres, A et B .

1. Montrer que le portefeuille de variance minimale est obtenu pour une allocation $(x^*, 1 - x^*)$ où x^* , la fraction de la richesse dévolue à l'acquisition du titre A est donnée par :

$$x^* = \frac{4}{5}.$$

- a. Écrire le programme (fonction-objectif et contraintes éventuelles) dont cette expression de x^* est la solution. (0,5 point)
- b. Le résoudre en vue d'obtenir cette solution. (1 point)

- c. Représenter graphiquement l'ensemble des portefeuilles possibles, ainsi que celui des portefeuilles efficients selon que les ventes à découvert sont autorisées ou non. (0,5 point).
2. Nous supposons maintenant qu'il existe un actif sans risque dont le taux de rendement est $r_0 = 0,5$. Donner l'équation de la droite de marché des capitaux :
 - a. Déterminer l'allocation correspondant au portefeuille tangent (1 point)
 - b. En déduire l'équation de la droite de marché des capitaux (1 point)
 - c. Représenter graphiquement l'ensemble des portefeuilles possibles, puis, celui des portefeuilles efficients. (0,5 point).
3. On considère la fonction d'utilité :

$$U(\mu, \sigma) = \mu - \alpha \sigma^2, \quad \alpha > 0.$$

- a. Donner l'expression, fonction de α , de l'allocation optimale pour un investisseur doté de cette fonction d'utilité. (1 point)
- b. Quels portefeuilles choisiraient alors deux investisseurs, M et N dont les fonctions d'utilité respectives sont :

$$U_M(\mu, \sigma) = \mu - 0,5\sigma^2 \qquad U_N(\mu, \sigma) = \mu - \sigma^2$$

Commenter. Illustrer graphiquement. (1 point).

Exercice 2 (3,5 points) :

Soit R_E , le rendement aléatoire d'un portefeuille efficient dont le rendement espéré est $E(R_E) = 0,2$. Il existe un actif sans risque, unique, dont le rendement est $r_0 = 0,05$. Le portefeuille de marché a, quant à lui, un rendement espéré, $E(R_M) = 0,15$ et une variance, $\sigma^2(R_M) = 0,04$.

1. On s'intéresse dans un premier temps au portefeuille efficient, E .
 - a. Donner son beta, β_{EM} ? (0,75 point)
 - b. Donner l'écart-type, $\sigma(R_E)$, de son rendement. (0,75 point)
 - c. Donner le coefficient de corrélation linéaire, ρ_{EM} , entre son rendement et celui du portefeuille de marché. (0,75 point)
2. Nous considérons maintenant une action quelconque que nous noterons, A et dont nous noterons le rendement aléatoire, R_A . Le rendement espéré et la variance de cette action sont respectivement :

$$E(R_A) = 0,25 \qquad \text{var}(R_A) = 0,52$$

- a. Evaluer le risque systématique dont est assortie l'action A . (0,75 point)
- b. Quel est alors le risque spécifique correspondant ? (0,5 point)