

Examen Cours Théorie des Probabilités

Janvier 2023

Pas de documents autorisés

Durée : 1h30

1 Questions de cours

1. Décrire la tribu engendrée par deux ensembles A et B disjoints
2. Soit X et Y deux variables aléatoires gaussiennes indépendantes. Montrer que $X + Y$ est une variable gaussienne et précisez sa loi.
3. Soit X une variable aléatoire normale. Calculer $\mathbb{E}(e^X)$ et $\text{Var}(e^X)$
4. Soit X et Y deux variables réelles. Si $\mathbb{E}[|X|] < \infty$, alors

$$\forall a > 0, \mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[|X|]}{a}$$

2 Exercices : variables aléatoires discrètes

1. Calculer les fonctions génératrices des lois Bernoulli, Binomiale, Géométrique et Poisson. (pour rappel : la fonction génératrice de X est $\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$, $\forall t \in \mathbb{R}$)
2. **Loi de Poisson** Soit X_1 et X_2 des variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètres respectifs $\theta_1 > 0$ et $\theta_2 > 0$.
 1. Calculer la loi de $X_1 + X_2$
 2. Calculer la loi de X_1 sachant $X_1 + X_2$. Reconnaitre cette loi.
 3. Calculer $\mathbb{E}[X_1 | X_1 + X_2]$

3 Exercices : variables aléatoires continues

1. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi respective $\Gamma(\lambda, a)$ et $\Gamma(\lambda, b)$ avec $a, b, \lambda \in]0, \infty[$
 1. Calculer la loi du couple $(X + Y, \frac{X}{X+Y})$
 2. Sont les variables $X + Y$ et $\frac{X}{X+Y}$ indépendantes ?
 3. Calculer les lois marginales de $S = X + Y$ et $T = \frac{X}{X+Y}$

Liste des lois de probabilité :

1. Bernoulli(p) : $\mathbb{P}(X = 1) = p$, $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$
2. Binomiale(n, p) : $\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$
3. Poisson(λ) : $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

4. Géométrique(p) : $\mathbb{P}(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$
5. Gaussienne(m, σ^2) : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$
6. Uniforme : $\frac{1}{b-a} 1_{[a,b]}(x)$
7. Gamma(λ, a) : $\frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} e^{-\lambda x} x^{a-1}$