Examen de Calcul Stochastique — Sept. 2017

Durée : 1h30
Sans document

Dans tout l'examen on se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Sur cet espace, on définit un mouvement brownien $(B_t, t \geq 0)$. On munit ensuite $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ de la filtration naturelle du mouvement brownien, définie par $\forall t$, $\mathcal{F}_t = \sigma(B_u, u \leq t)$. On obtient alors l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$.

Questions de cours

1) Donner la définition du mouvement brownien ainsi qu'une caractérisation possible.

2) Donner la définition d'une martingale (indexée par $t \geq 0$).

3) Sur quelle classe de processus peut-on définir l'intégrale stochastique contre un mouvement brownien ?

4) Donner (sans démonstration) la loi de $\int_0^t f(s)dW_s$ où (W_s) est un mouvement brownien et f est une fonction déterministe.

Exercice 1

On définit le processus $(X_t, t \geq 0)$ pour tout t positif par :

$$X_t = B_t^2 - t$$

1) Montrer que ce processus est une martingale en utilisant la définition.

2) a) En remarquant que $X_t = f(t, B_t)$ pour une fonction f à déterminer, appliquer le lemme d'Ito (on justifiera les hypothèses du théorème) pour donner la dynamique de X_t.

2) b) En déduire que X_t peut s'écrire sous la forme d'une intégrale stochastique.

Exercice 2

Soient y, a, b et c des réels strictement positifs. Considérons un processus Y vérifiant l'équation différentielle stochastique (EDS) :

$$\left\{\begin{array}{rcl} dY_t & = & a(b-Y_t).dt + c.dB_t \\ Y_0 & = & y \end{array}\right.$$

1) On définit le processus $Z_t = \exp(at)Y_t$, ceci pour tout $t \geq 0$. En appliquant le lemme d'Ito ou une formule d'intégration par partie, déterminer l'EDS vérifiée par Z.

2) En déduire l'expression suivante pour le processus Y :

$$\forall t \geq 0 \ , \quad Y_t = y\exp(-at) + b(1-\exp(-at)) + c\int_0^t \exp(-a(t-s))dB_s$$

3) Calculer l'espérance et la variance de Y_t puis donner sa loi.

Exercice 3

On se propose dans cet exercice de démontrer l'unicité de la solution de l'équation différentielle stochastique (EDS) suivante (on admettra l'existence) :

$$\left\{\begin{array}{rcl} dX_t & = & rX_t dt + \sigma X_t dB_t \\ X_0 & = & x_0 \end{array}\right.$$

avec x_0, r et σ des réels strictement positifs.

On considère deux processus $(M_t, t \geq 0)$ et $(N_t, t \geq 0)$, solutions de cette EDS.

1) Donner la dynamique (appliquer le lemme d'Ito) du processus $V_t = \frac{1}{N_t}$

2) Donner la dynamique (appliquer le lemme d'Ito) du processus $W_t = \frac{M_t}{N_t} = M_t.V_t$

3) En déduire la valeur de W_t pour tout $t \geq 0$ puis conclure.